

ОБЩЕСТВО «ЗНАНИЕ» РСФСР

Ленинградское отделение

И. Я. ДЕПМАН

ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО С МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКОЙ

ЛЕНИНГРАД
1963

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
Из истории математической логики	4
Знакомство с математической логикой	12
Начальные идеи алгебры логики	14
Правила обычной алгебры	—
Алгебра высказываний	15
Некоторые особенности алгебры высказываний	19
Физическое истолкование сложения и умножения в алгебре логики	22
Решение логических уравнений	27
Напоминание начинающему	—
Примечания к решению задач и ответы к упражнениям	49
Второй способ решения задачи	—
Машина или наука лентяев?	53

* * * *

Иван Яковлевич Деман

*Первое знакомство
с математической логикой*

Редактор издательства

И. Н. Толстов

Техн. редактор

А. М. Гурджиева

Обложка художника

Э. И. Копеляна

Корректор

Н. Е. Кацнельсон

М-49033	Подписано к печати 2/IX 1963 г.	Заказ 348-а
Объем 3,5 печ. л.	уч.-изд. л. 2,55	
Тираж 14400 экз.	Цена 8 коп.	



Математическая логика — эти слова всё чаще можно услышать в разговорной речи, увидеть в газетных и журнальных статьях. Их употребляют не только ученые, инженеры и техники, но и машиностроители, и учителя.

Человек издавна стремился к созданию приборов и машин, которые выполняли бы за него не только физическую, но и умственную работу. В настоящее время человечество имеет такие машины. Они в миллион раз быстрее их создателя и считают и вычисляют. Построены эти машины на основании данных математической логики. Математическая логика, и особенно ее составная часть — алгебра логики, — имеет глубокую принципиальную связь с теорией построения автоматов. Она послужила основанием для развития кибернетики — «этого высшего раздела автоматики, служащего созданию машин, продолжающих человеческий мозг».¹

В великом документе современности — Программе КПСС записано, что в течение двадцатилетия будет осуществляться в массовом масштабе комплексная авто-

¹ Э. Кольман. Значение символической логики. Сб. «Логические исследования». Изд. Академии наук, М., 1959, стр. 15.

материя. Поэтому «получат широкое применение кибернетика, электронные счетно-решающие и управляющие устройства в производственных процессах промышленности, строительной индустрии и транспорта, в научных исследованиях, в плановых и проектно-конструкторских расчетах, в сфере учета и управления».¹

Математическая логика является не только основанием для автоматизации, но и средством для изучения деятельности мозга — для решения этой самой важной проблемы биологии и науки вообще.

Физико-математические науки сегодняшнего дня требуют также анализа таких тонких понятий, выполнить которые можно только при помощи методов математической логики. Вследствие этого математическая логика стала основным методом исследования многих вопросов современной физики.

По этим и другим причинам математическая логика глубоко вторглась во многие отрасли промышленности, стала характерным явлением науки середины XX века.

ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ²

Законы мышления, предмет изучения логики, устанавливались древнегреческими учеными уже с VI века до начала нашего летоисчисления. Формирование их происходило в ответ на запросы математики и астрономии, служило основой политических и юридических споров того времени. Одновременно с возникновением наук у древних народов создавались и накапливались правила, приводившие к истинным или ложным выводам.

Человечество в первые века развития логики располагало низким уровнем техники, примитивными знаниями в области естествознания и математики. Исследователи той эпохи обходились самыми простыми приемами мышления.

Логика как самостоятельная наука возникла лишь в IV веке до нашей эры. Создатель ее — греческий философ Аристотель (384—322). Он свел отдельные разроз-

¹ Материалы XXII съезда КПСС. Госполитиздат, 1961, стр. 372.

² Рекомендуется читать после ознакомления с разделом о решении уравнений.

ненные обрывки логических учений в систему, которая сохранилась до нашего времени в виде формальной логики. Эта неизменность логики вызывала насмешки сатириков всех времен (Рабле, Свифта, Сервантеса и других). Немецкий философ Кант в конце XVIII века говорил, что логика со времени Аристотеля не сделала ни шагу вперед и, по-видимому, имеет совершенно законченный вид.

С XVII века начинается бурное развитие наук, особенно математики, в которой центральное положение занял анализ переменных величин. Анализ переменных величин произвел переворот во многих областях науки и техники. Зарождается высшая математика. Создатели ее — Декарт, Паскаль, Ньютон, Лейбниц и их продолжатели ясно чувствуют недостаточность Аристотелевой логики. Начинаются поиски обновления и дополнения формальной логики.

Заслуги выяснения возможности реформы логики принадлежат немецкому ученому, великому математику Готфриду Вильгельму Лейбницу (1646—1716). У него в юношеские годы возникает идея о необходимости и возможности создания новой науки, в которой каждое основное понятие имело бы свой особый символ. Для этих символов нужно установить правила их соединения, и тогда всякое рассуждение получит вид некоторого исчисления, аналогичного математике. Логика, по мысли Лейбница, должна стать «искусством исчисления», споры ученых и философов должны разрешаться спокойным вычислением.

В конце своей жизни он пишет: «Когда я, будучи еще мальчиком, знакомился с предложениями обычной логики и мне еще была незнакома математика, у меня возникла, не знаю в результате какого мановения, мысль о том, что может быть изобретен анализ понятий,



Готфрид Лейбниц

с помощью которого могут быть комбинированы истины и вычисляемы при помощи чисел». Лейбниц считал, что все наши знания можно разложить на простые элементы: обозначенные особыми символами, они составят алфавит человеческих мыслей, которые дают логическое исчисление — «лучший из мыслимых инструментов исследования».

«Споры не придут к концу, если не отказаться от словесных рассуждений в пользу простого исчисления, если не заменить слова неясного и неопределенного смысла определенными символами. После введения их при воз-



Джордж Буль

никающих противоречиях между двумя философами будет не больше надобности перекрикивать друг друга, чем между двумя бухгалтерами. Не требуется ничего другого, как то, чтобы противники взяли в руки перья, сели за свои конторки и сказали друг другу: давайте-ка вычислять!»

Создание единой всеобщей системы понятий — одно из многих неосуществленных мечтаний гениального Лейбница.

Через полтора столетия идеи Лейбница высказываются вновь чешским математиком Бернхардом Больцано (1781—1848), но при его жизни они не получают рас-

пространения, как и все другие передовые взгляды Больцано, считавшиеся католической церковью крамольными.

Частичное осуществление идей Лейбница началось в середине XIX века в трудах ирландского математика Джорджа Буля (1815—1864).

Джордж Буль в своих трудах «Математический анализ логики» (1847) и «Законы мышления» (1854) впервые излагает «алгебру логики» (называемую часто впоследствии «алгеброй Буля»). Буль пишет: «Тот, кто зна-

ком с современной алгеброй, знает, что справедливость процесса анализа не зависит от интерпретации (истолкования) встречающихся символов. Всякая интерпретация их, не нарушая предположенных отношений, одинаково допустима, а поэтому один и тот же прием может дать при одном истолковании решение проблемы теории чисел, при другом — решение проблемы геометрии, при третьем — решение проблемы динамики или оптики и так далее».

По Булю, формулы алгебры применимы независимо от того, что подразумевать под употребляемыми в алгебре буквами. Он создал алгебру, в которой буквы обозначают высказывания, и показал, что в этой новой алгебре все правила обычной алгебры остаются в силе. Так как все наши рассуждения состоят из высказываний или суждений, то эта новая алгебра является логикой и получила название алгебры логики.

Это и есть уже частичное осуществление идеи Лейбница об универсальном научном языке символов. Буль показал осуществимость своих идей в созданной им алгебре высказываний.

Современники и ученые нашего времени высоко оценили Джорджа Буля, основоположника математической логики. «Буль совершил реформу, с которой едва ли может сравниться что-либо сделанное в логике, от далеких времен Аристотеля и до настоящего времени» (английский логик Джевонс); «Джордж Буль сделал самый крупный шаг вперед в логике после Аристотеля» (философ Спенсер); «чистая математика открыта Булем в его работе „Законы мышления“» (Бертран Рассел); «введение символических обозначений в логику имело для этой науки такое же решающее значение, как, например, изобретение буквенных обозначений для математики. Известно, что благодаря введению буквенных обозначений и символов математических действий (Виет, Декарт, Ферма и другие) математика, начиная с эпохи Возрождения, получила возможность дальнейшего столь грандиозного развития. Только такие гении древности, как Архимед, Евклид, Диофант, смогли дать замечательные образцы математического творчества, не пользуясь языком формул и излагая свои мысли в словесной форме. Благодаря введению символов в девятнадцатом веке логика получила возможность дальнейшего развития и стало

возможным образование новой науки — математической логики».¹

Работы Буля также не привлекли к себе вначале внимания философов, для которых были малодоступны математические изложения и символика Буля, действительно сложные и недоработанные. Алгебру Буля считали, как и геометрию Лобачевского, воображаемой, не имеющей конкретного смысла.



П. С. Порецкий

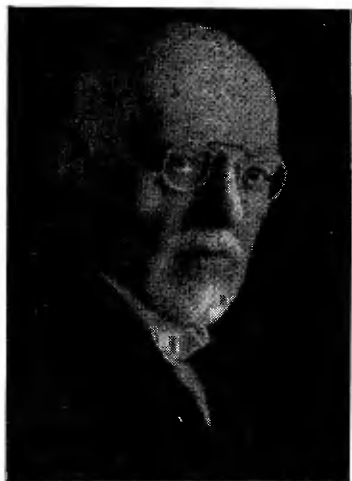
К концу XIX века в математике возникли большие трудности в обосновании ее основных понятий и идей. В сложных вопросах этого обоснования формальная логика оказалась бессильной. Это вызвало интерес математиков к символической логике. Немецкий математик Готлиб Фреге (1848—1925) в конце XIX века предпринял сложную работу логического обоснования арифметики при помощи математической логики и вместе с тем дал дальнейшую разработку новой логики. То

же в более широких областях математики и других наук сделал итальянский математик Джузеппе Пеано (1858—1932).

В России вопросами математической логики занимался астроном-наблюдатель Казанского университета Платон Сергеевич Порецкий (1846—1907). В 1887 и 1888 годах впервые в России он читал в Казанском университете лекции по математической логике. П. С. Порецкий разрабатывал преимущественно логику классов и логику высказываний, где, в частности, занимался отысканием

¹ Журн. «Математическое просвещение». Гос. изд. физ.-мат. лит. 1958, № 3, стр. 195.

систематических приемов, позволяющих обозреть множество следствий, вытекающих из данных посылок, и множество гипотез, при допущении которых оказываются справедливыми данные положения. Ему принадлежит



Давид Гильберт



Бертран Рассел

полное решение этого вопроса для исчисления высказываний. В трудах П. С. Порецкого дан критический анализ предшествующего развития математической логики.

Из математиков XIX века значительные труды по математической логике дали еще Р. Грассман (1815—1905) — младший брат знаменитого математика Германа Грассмана, Э. Шредер (1853—1901) и другие.

В начале XX века математическая логика привлекает очень многих исследователей. Ее развивают крупный немецкий математик Д. Гильберт (1862—1943), англичане — философ и логик Бертран Рассел

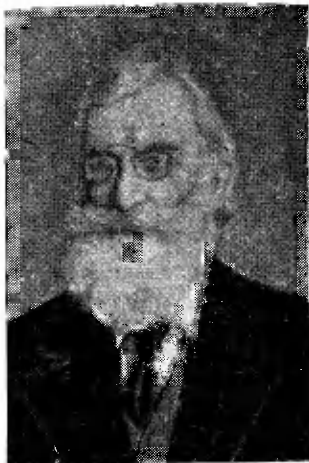


Курт Гёдель

(родился в 1872 году) и математик Уайтхед (1861—1947), польские математики Лукасевич и Тарский и другие. Крупнейшим представителем математической логики на Западе в настоящее время является Курт Гёдель.

Из советских математиков наибольший вклад в развитие математической логики внесли И. И. Жегалкин (1860—1947), П. С. Новиков (родился в 1901 году) и А. А. Марков (родился в 1903 году).

Ивану Ивановичу Жегалкину в математической логике принадлежит построение алгебры логики как арифметики вычетов по модулю 2 и ряд работ, посвященных некоторым важным случаям, допускающим алгоритмическое решение так называемой проблемы разрешаемости.



И. И. Жегалкин



П. С. Новиков

Действительный член Академии наук СССР Петр Сергеевич Новиков занимается вопросами теории множеств и математической логикой. Его обширный труд «Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп» представляет высшее достижение в теории математической логики.

Советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР Андрей Андреевич Марков доказал методами математической логики невозможность алгоритмического решения некоторых задач

теории ассоциативных систем и задач, относящихся к целочисленным матрицам. Своей работой «Теория алгоритмов» А. А. Марков внес большой вклад в развитие теории математической логики.

Широкий интерес математическая логика приобрела в середине нашего века.

С пятидесятых годов формируются новые математические науки — кибернетика, теория информации, теория игр, которые немислимы без математической логики. Аксиоматическое построение математики в целом, считающееся единственно приемлемым в наши дни, опирается на математическую логику. Таким образом, основным потребителем, а вследствие этого и первым толкачом развития математической логики была математика.

Однако математика не была единственным пространения, как и все другие передовые взгляды шую роль в ее развитии играла физика и основывающаяся на ней техника.

В начале нынешнего века Павел Сигизмундович Эренфест (1880—1933), преподававший в то время физику в Политехническом институте в Петербурге, указал на возможность применения логики в технике (при составлении схемы проводов телефонной станции и в электронике). Эренфест пишет: «Символическая формулировка дает возможность вычислять следствия из таких сложных систем посылок, в которых при словесном изложении почти или совершенно невозможно разобраться. Дело в том, что в физике и технике действительно существуют такие сложные си-



А. А. Марков

стемы посылок». Эренфест указывает, что символическая алгебра в физике и технике играет такую же роль, как формулы химии, которые «доставляют не толь-

ко систематическую регистрацию различных веществ, но кроме этого — пути преобразования этих формул, произведенные по определенным правилам, соответствующим химическим преобразованиям».¹ Это замечание имеет большой методологический смысл, так как подчеркивает принципиальное единство природы логической и естественнонаучной символики. Символика в логике столь же необходи-



П. С. Эренфест

ма, как язык формул для математики и химии.

Любой автомат, все быстродействующие счетные машины опираются на применение математической логики. Техника является не менее мощным толкачом для развития математической логики, чем математика.

Работы П. С. Эренфеста имеют такое же значение в истории развития математической логики, как труды П. С. Порецкого. И тем и другим отечественная наука имеет основание гордиться.

ЗНАКОМСТВО С МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКОЙ

Математическая логика — это наука, изучающая математические доказательства. Она является особой ветвью общей логики, развивающейся применительно к потребностям математики.

Существенным для математической логики является употребление символов. В первый период существования

¹ Журн. Русского физико-химического общества при Петербургском университете, 1910, отдел физики, т. 42, от. II, стр. 387.

математической логики каждый ученый употреблял свою систему символов, что сильно затрудняло усвоение и распространение новой алгебры. Только в первые десятилетия нашего века устанавливается единообразная символика. Вот образчик её из книги Бертрана Рассела.

$$*54.42. \vdash :: \alpha \in 2. \supset :: \beta \subset \alpha. \supset ! \beta. \beta \neq \alpha. \equiv. \beta \in 1^{\circ} \alpha$$

Dem.

$$\vdash *54.4. \supset \vdash :: \alpha = 1^{\circ} x \cup 1^{\circ} y. \supset ::$$

$$\beta \subset \alpha. \supset ! \beta. \equiv : \beta = \Lambda. \vee. \beta = 1^{\circ} x. \vee. \beta = 1^{\circ} y. \vee. \beta = \alpha : \supset ! \beta :$$

$$[*24.53.56 *51.161] \quad \equiv : \beta = 1^{\circ} x. \vee. \beta = 1^{\circ} y. \vee. \beta = \alpha \quad (1)$$

$$\vdash *54.25. Transp. *52.22. \supset \vdash : x \neq y. \supset. 1^{\circ} x \cup 1^{\circ} y \neq 1^{\circ} x. 1^{\circ} x \cup 1^{\circ} y \neq 1^{\circ} y :$$

$$[*13.12] \supset \vdash : \alpha = 1^{\circ} x \cup 1^{\circ} y. x \neq y. \supset. \alpha \neq 1^{\circ} x. \alpha \neq 1^{\circ} y \quad (2)$$

$$\vdash (1). (2). \supset \vdash :: \alpha = 1^{\circ} x \cup 1^{\circ} y. x \neq y. \supset ::$$

$$\beta \subset \alpha. \supset ! \beta. \beta \neq \alpha. \equiv : \beta = 1^{\circ} x. \vee. \beta = 1^{\circ} y :$$

$$[*51.235]$$

$$\equiv : (\exists z). z \in \alpha. \beta = 1^{\circ} z :$$

$$[*37.6]$$

$$\equiv : \beta \in 1^{\circ} \alpha \quad (3)$$

$$\vdash (3). *11.11.35. *54.101. \supset \vdash Prop$$

$$*54.43. \vdash :: \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv. \alpha \cup \beta \in 2$$

Dem.

$$\vdash *54.26. \supset \vdash :: \alpha = 1^{\circ} x. \beta = 1^{\circ} y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv. x \neq y.$$

$$[*51.231]$$

$$\equiv. 1^{\circ} x \cap 1^{\circ} y = \Lambda.$$

$$[*13.12]$$

$$\equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$$

$$\vdash (1). *11.11.35. \supset$$

$$\vdash :: (\exists x, y). \alpha = 1^{\circ} x. \beta = 1^{\circ} y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2 \equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$$

$$\vdash (2). *11.54. *52.1. \supset \vdash Prop$$

Первое знакомство с математической логикой нужно начинать с алгебры логики, а именно: с решения логических уравнений, в которых немного символов. Начинать с этого раздела следует и потому, что историческое развитие математической логики началось с алгебры логики.

Алгебра является важнейшей частью школьной математики — той частью, которая усваивается более прочно. Алгебра логики, прибавляя очень немного к сведениям по школьной алгебре, является самым удобным путем введения учащегося в круг начальных сведений математической логики. Ведь недаром распространено изречение: «Человеческий ум не придумал ни одной машины, в такой мере облегчающей его труд, как алгебра».

Подход к понятиям математической логики через решение логических уравнений имеет и другое основание.

Учащийся средней школы знает о перевороте, который произвели идеи Н. И. Лобачевского (1792—1856) в геометрии, имевшей к тому времени 25-вековой возраст. Любопытный учащийся, естественно, спросит: происходило ли в алгебре что-нибудь подобное? Знакомство с решением логических уравнений покажет такому любопытному человеку, что в последние годы жизни Лобачевского, в середине XIX века, в алгебре трудами Джорджа Буля был совершен переворот, весьма похожий на обновление геометрии идеями нашего великого геометра. И судьбы обоих переворотов — в геометрии и в алгебре — весьма сходны: потребовалось несколько десятилетий, чтобы смысл того и другого переворота был понят и оценен. И только после этого наступило время самого широкого использования идей Лобачевского и Буля.

Знакомство с решением логических уравнений важно и для расширения кругозора учащихся.

Уроки школьной алгебры создают у учащихся взгляд, согласно которому основную задачу алгебры как будто составляет решение уравнений. Но современная алгебра видит главную задачу алгебры не в вычислении корней уравнений, а в изучении свойств алгебраических функций, в частности, в изучении таких множеств элементов произвольной природы, к которым применимы правила обычной алгебры, хотя элементы этих множеств не являются числами. Изучение логических уравнений знакомит читателя с одной из таких алгебр и помогает ему усвоить современный взгляд на алгебру.

НАЧАЛЬНЫЕ ИДЕИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Правила обычной алгебры

Действия и преобразования, применяемые в обычной алгебре, в которой буквами обозначаются числа, основываются на небольшом числе определений и формул.

I. Существует арифметическое действие, называемое сложением и обозначаемое знаком $+$. Устанавливается, что для каждой пары данных двух чисел a и b существует единственное определенное число c , называемое суммой чисел a и b . Действие сложения обладает переместительным и сочетательным свойствами. Отсюда формулы:

1) $a + b = c$ (существование единственной суммы чисел a и b),

2) $a + b = b + a$ (переместительное свойство),

3) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (сочетательное свойство).

II. Существует второе арифметическое действие, называемое умножением и обозначаемое знаком \times или \cdot (последний знак при употреблении буквенных обозначений обычно не ставится). Действие умножения обладает теми же свойствами, что и сложение: для каждого двух чисел a и b существует определенное единственное произведение ab , и действие умножения обладает переместительным и сочетательным свойствами, которые дают формулы:

4) $ab = ba$ (существование произведения),

5) $ab = ba$ (переместительное свойство),

6) $a(bc) = (ab)c$ (сочетательное свойство).

Сложение и умножение обладают распределительным свойством: чтобы умножить сумму двух слагаемых на третье число, можно умножить каждое слагаемое отдельно на это число и полученные произведения сложить:

7) $(a + b)c = ac + bc$ (распределительное свойство).

III. Существует такое число, обозначаемое знаком 0 (нуль), при сложении которого с любым числом a получается в сумме то же число a , а при перемножении его (то есть нуля) с любым числом a получается в произведении 0. Отсюда формулы:

8) $a + 0 = 0 + a = a$,

9) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

IV. Существует еще число, обозначаемое знаком 1 и называемое единицей, при перемножении с которым любого числа a получается в произведении то же число a :

10) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Отмеченные десять формул являются основными законами обычной арифметики и алгебры.

Алгебра высказываний

Джордж Буль, давший в 1847 году первое положение алгебры логики, сделал предположение, что буквы в записанных десяти формулах обозначают не числа, а выс-

казывания, и показал, что можно выбрать такие определения действий сложения и умножения, при которых все десять формул остаются в силе.

Не должен удивлять нас тот факт, что надо выбрать новые определения сложения и умножения. Это делается и в обычной алгебре. Действия сложения и умножения для дробных, отрицательных или комплексных чисел имеют иной смысл, чем для натуральных чисел. При переходе от одной числовой области к другой надо определять, что будет называться суммой или произведением новых чисел.

Может показаться бессмысленным понятие арифметических действий над высказываниями. Что понимать, например, под «суммой» таких высказываний: «В огороде бузина, а в Киеве дядька»? Как будто никакого смысла для «суммы» таких высказываний нельзя указать.

В алгебре логики высказывание рассматривается не по содержанию или смыслу его, а только в отношении того, истинно оно или ложно. Принимается, что каждое высказывание может быть или истинно, или ложно. Условимся истинность высказывания обозначать единицей, а ложность — нулем. Тогда каждое высказывание может быть охарактеризовано цифрами 1 или 0, которые являются мерами или функциями истинности высказывания a . Для любого высказывания a либо $a = 1$, либо $a = 0$.

Сумма двух высказываний a и b , то есть $a + b$, является сложным высказыванием, которое, как всякое высказывание, может быть истинно или ложно. Сумма двух высказываний считается истинной, то есть равной единице, если хоть одно из складываемых высказываний истинно:

$$a + b = 1,$$

если или $a = 1$ или $b = 1$, что согласно с обычной арифметикой:

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1.$$

Если оба складываемых высказывания истинны, то сумма считается также истинной, поэтому в алгебре логики

$$(1) + (1) = 1.$$

Скобки поставлены для того, чтобы подчеркнуть условный, необычный смысл этого сложения.

Это особенность алгебры логики, вытекающая из того, что и для суммы двух высказываний, которая является сложным высказыванием, можно поставить только вопрос: считается ли она истинной или ложной; поэтому сумма должна иметь меру истинности или 1 или 0.

Сумма двух высказываний считается ложной и равной нулю тогда и только тогда, когда оба слагаемых ложны, то есть

$$0 + 0 = 0.$$

Итак, «сумма» двух высказываний $a + b$ считается истинной, если истинно или a , или b , или оба слагаемых. Таким образом, слово «или» обозначается знаком $+$. Мы этим выполняем частичку плана Лейбница о замене слов символами.

В алгебре логики «сумма» $a + b$ часто называется дизъюнкцией и знак $+$ обозначается знаком \vee (первой буквой латинского слова «vel» — или). Нет надобности при первом ознакомлении с новой алгеброй вводить новый термин и новый знак. «Суть дела (в математике) заключается не в названиях, а в понятиях», — учит нас великий математик Гаусс.

Итак, мы рассмотрели действие сложения в алгебре логики.

Произведение ab двух высказываний a и b является также сложным высказыванием. Оно считается истинным (равным единице) тогда и только тогда, когда оба сомножителя истинны, и ложным (равным нулю), если хоть один из сомножителей ложен. Это определение произведения соответствует обычной арифметике:

$$1 \cdot 1 = 1,$$

$$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$0 \cdot 0 = 0.$$

Первое равенство читается так: если и a , и b истинны, то произведение ab истинно. Значит, знак умножения \times или \cdot заменяет союз «и».

В алгебре логики «умножение» часто называется конъюнкцией и обозначается особым знаком \wedge . В нашем изложении мы не будем этого делать.

Определения сложения и умножения алгебры логики можно выразить следующими таблицами, помня, что

a и b могут быть истинными или ложными, значит, иметь меру истинности 1 или 0:

a	b	$a + b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a	b	ab
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Установив данные определения сложения и умножения, легко доказать, что все десять правил обычной алгебры остаются верными и в алгебре логики.

Докажем в качестве примера переместительные законы. Для этого составим соответствующие таблицы, давая буквам a и b по порядку значения 1 или 0, комбинируя их и находя по данным правилам меру истинности суммы и произведения.

a	b	$a + b$	$b + a$	ab	ba
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

Меры истинности сумм $a + b$ и $b + a$ (третий и четвертый столбцы) при всех возможных комбинациях мер истинности a и b совпадают, следовательно $a + b$ и $b + a$ в отношении истинности всегда «равны». То же происходит с произведениями ab и ba (пятый и шестой столбцы таблицы).

Дадим еще доказательство распределительного закона

$$(a + b) c = ac + bc;$$

a	b	$a + b$	c	$(a + b)c$	ac	bc	$ac + bc$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

В первом, втором и четвертом столбцах содержатся все возможные комбинации значений меры истинности для a , b и c ; в пятом и восьмом столбцах стоят значения меры истинности для выражений $(a + b)c$ и $ac + bc$. Во всех случаях меры истинности обоих выражений одинаковы: если $(a + b)c$ истинно (1), то так же истинны и $ac + bc$. Если $(a + b)c$ ложно (0), то ложно и $ac + bc$. Значит, в отношении истинности при всех возможных комбинациях a , b , c имеет место распределительный закон

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Так же можно проверить, что все законы обычной алгебры остаются в силе и для алгебры высказываний при указанном выше определении действий сложения и умножения. (Проверьте справедливость сочетательных законов!).

Некоторые особенности алгебры высказываний

В алгебре высказываний вводится действие, которого нет в обычной алгебре, — отрицание данного высказывания. Для каждого высказывания a существует его отрицание «не- a », которое будем обозначать символом \bar{a} (иногда для этого употребляются символы a' или $\sim a$). Если высказывание a истинно (и), то его отрицание \bar{a}

ложно (л); если a ложно, то его отрицание \bar{a} истинно. Это можно выразить таблицами:

a	\bar{a}		a	\bar{a}
и	л	или	1	0
л	и		0	1

Из определения смысла действия отрицания, именно из того положения, что из противоположных высказываний a и \bar{a} всегда истинно одно и только одно, следующие формулы алгебры логики:

$$11) a + \bar{a} = 1,$$

$$12) a\bar{a} = 0.$$

Формулы (11) и (12) следуют из того, что из противоположных высказываний a и не- a всегда одно ложно, другое истинно, поэтому согласно определениям сумма их $a + \bar{a}$ истинна, произведение $a\bar{a}$ — ложно.

В обычной алгебре формулы (11) и (12) не имеют смысла. В алгебре логики они существуют и позволяют при преобразованиях выражений делать указываемые в формулах (11) и (12) замены, чем значительно упрощают выкладки.

Предупреждаем, что понятие отрицания суждения требует очень внимательного к нему отношения.

Надо помнить что отрицанием данного высказывания называется такое суждение, которое не совместимо с данным при любом конкретном содержании и его, так как высказывание и его отрицание не должны быть оба истинными или оба ложными ни при каком конкретном содержании.

Пример из двух высказываний:

«Никто из членов нашего третьего пионерского звена не стал отличником учебы», и

«Все члены нашего третьего пионерского звена — отличники учебы».

Ни одно предложение не является отрицанием другого, так как оба одновременно могут быть ложными.

В алгебре логики существуют еще другие упрощающие формулы, которых нет в обычной алгебре. Вот некоторые примеры их:

$a + a = a, a + a + a = a, \dots, \underbrace{a + \dots + a + a}_{n \text{ раз}} = a$ при любом числе слагаемых (иными словами: $na = a$).

Точно так же

$$aa = a^2 = a, a^3 = a, aa \dots a = a^n = a$$

(в обоих случаях n — целое положительное число).

Равенства $na = a$ и $a^n = a$ вытекают из определений действий сложения и умножения в алгебре логики: если a означает высказывание «стол черный», то сколько бы раз мы ни повторяли «стол черный» или говорили «стол черный и стол черный», ничего иного, как высказывание «стол черный», мы не получили бы, то есть $na = a$ и $a^n = a$.

Итак, в алгебре логики нет коэффициентов, отличающихся от единицы, нет степеней выше первой; поэтому многочлены в этой алгебре проще, чем в обычной алгебре, и преобразования выражений легче. Кроме того, имеют место еще другие упрощения выкладок, из которых здесь приведем только одно, так как оно нам понадобится при решении задачи 9 (стр. 46).

Кроме распределительного закона обычной алгебры

$$(a + b)c = ac + bc,$$

в алгебре логики имеется еще другой распределительный закон:

$$(a + c)(b + c) = ab + c. \quad (*)$$

Докажем справедливость этого закона в алгебре логики обычным методом применения таблицы истинности, давая буквами a, b, c значения единицы и нуля и рассматривая все комбинации этих значений (см. стр. 22)

Мера истинности в седьмом и восьмом столбцах во всех случаях одинакова, формула (*) всегда верна.

Можно получить еще ряд других «формул поглощения» аналогичным методом или простыми соображениями. Например: $1 + a = 1$, так как, согласно определению сложения, в случае, когда одно слагаемое равно единице,—

a	b	c	ab	$a+c$	$b+c$	$(a+c)(b+c)$	$ab+c$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

сумма равна единице, независимо от того, будет ли $a = 0$ или $a = 1$. Дальнейшие примеры формул поглощения:

$$a + ab = a(1 + b) = a \cdot 1 = a;$$

$$a(a + b) = a^2 + ab = a + ab = a(1 + b) = a \cdot 1 = a.$$

Формулы поглощения упрощают выкладки по сравнению с преобразованиями для соответствующих действий в обычной алгебре.

Всё изложенное приводит к заключению: так как все основные формулы обычной алгебры верны и для алгебры высказываний, то все преобразования, употребляемые в обычной алгебре при решении уравнений, остаются верными и в алгебре высказываний (в первую очередь возможность почленного перемножения частей уравнений). Особенности алгебры высказываний — действие отрицания, отсутствие показателей степеней и коэффициентов, отличных от единицы, — должны всегда учитываться. Нужно помнить, что в алгебре высказываний мы складываем и умножаем не числа, и поэтому нас не должны смущать равенства

$$a + a = a, aa = a^2 = a, 1 + a = 1$$

и другие, идущие вразрез с обычной алгеброй, в которой a означает число.

Физическое истолкование сложения и умножения в алгебре логики

Имеют ли сложение и умножение по правилам алгебры логики какое-нибудь конкретное истолкование? Да. Еще петербургский физик П. С. Эренфест обратил вни-

мание на возможность иллюстрации этих правил на физических и технических явлениях. Простейшим примером такой иллюстрации является действие выключателей.

Предположим, что ток идет из какого-нибудь источника Q к потребителю через выключатель S .

Выключатель может быть либо включен, либо выключен. Цепь соответственно будет или замкнута, или разомкнута. Эти два состояния представляют аналогию с мерой истинности высказываний (истинно или ложно). Включение выключателя и замкнутость цепи обозначается единицей, а выключение и разомкнутость цепи — нулем.

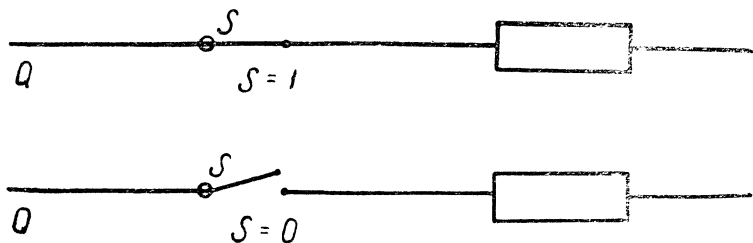


Рис. 1

Аналогию можно продолжить и ввести операции, которые соответствуют понятиям алгебры высказываний.

1) Можно выключатель S соединить с другим выключателем \bar{S} так, что при включении S выключатель \bar{S} будет выключен, и, наоборот, при выключении S выключатель \bar{S} будет включен. Явление может быть выражено таблицей:

S	\bar{S}
1	0
0	1

Это — таблица истинности противоположных высказываний. Действие такой установки показано на рисунке 2 (стр. 24).

2) Имеются два выключателя, которые соединены параллельно (рис. 3). Обозначим одного S , другого T .

Параллельную комбинацию выключателей обозначим через $S + T$. В результате такая комбинация выключателей, как и единственный выключатель, может замыкать

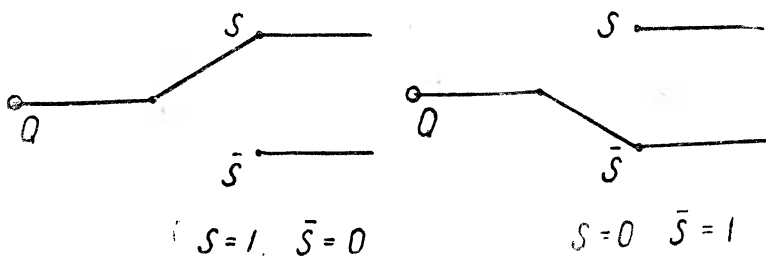


Рис. 2

или размыкать цепь. Если S и T оба включены, то $S + T$ замыкает цепь, и мы имеем $S + T = (1) + (1) = 1$. Цепь будет замкнута и в том случае, если один из выключателей включен, другой выключен:

$$S + T = 1 + 0 = 1, \bar{S} + T = 0 + 1 = 1.$$

Когда оба выключателя выключены, цепь будет разомкнута:

$$S = 0, T = 0, S + T = 0 + 0 = 0.$$

Результат действия $S + T$ определяется таблицей:

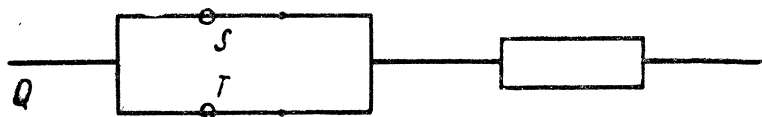
S	T	$S + T$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Это таблица истинности суммы двух высказываний.

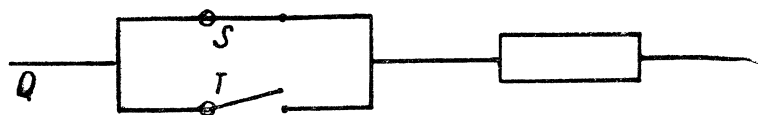
3) Перед нами выключатели S и T , которые соединены последовательно (рис. 4). Обозначим их совместное действие символом ST . Такая комбинация двух выключателей дает в результате замыкание или размыкание цепи.

Цепь будет замкнута лишь в том случае, если оба выключателя S и T включены:

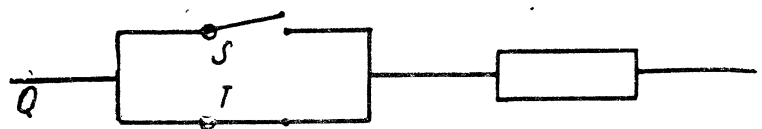
$$S = 1 \text{ и } T = 1, ST = 1 \cdot 1 = 1.$$



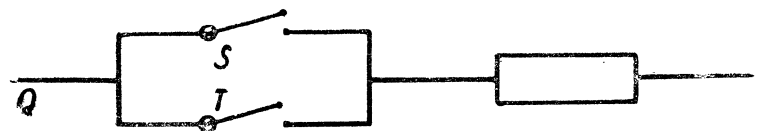
$$S = 1, \quad T = 1, \quad S + T = (1) + (1) = 1$$



$$S = 1, \quad T = 0, \quad S + T = 1 + 0 = 1$$



$$S = 0, \quad T = 1, \quad S + T = 0 + 1 = 1$$



$$S = 0, \quad T = 0, \quad S + T = 0 + 0 = 0$$

Рис. 3



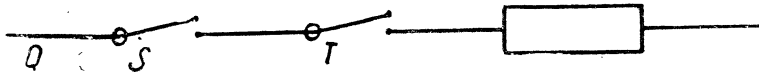
$$S = 1 \quad T = 1, \quad ST = 1$$



$$S = 1, \quad T = 0 \quad ST = 0$$



$$S = 0 \quad T = 1 \quad ST = 0$$



$$S = 0, \quad T = 0, \quad ST = 0$$

Рис. 4

Если же хоть один из выключателей не включен, то цепь будет разомкнута.

Замкнутость и разомкнутость цепи выражены таблицей:

S	T	ST
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Эта таблица показывает меру истинности произведения двух высказываний.

Таблицы, которые были составлены выше, свидетельствуют, что операции с выключателями подчиняются правилам алгебры логики и могут быть изучаемы средствами этой алгебры.

В зарубежных книгах открытие этого факта приписывается английскому физiku Клоду Шеннону. Однако, как говорилось в начале брошюры, П. С. Эренфест уже в 1910 году указал на это явление и другие возможности применения алгебры логики в технике.

* * *

После краткого объяснения смысла алгебры логики можно приступить к решению задач.

Каждую задачу будем решать сначала общими рассуждениями, арифметически, не применяя символов алгебры логики. Так как обычно это решение длиннее, чем решение при помощи уравнений, то, вероятно, читатель вскоре перестанет применять первый способ решения и сразу приступит к решению при помощи алгебры логики. Этим он подтвердит мысль о полезности новой алгебры.

РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Напоминание начинающему

1) Помните, что все правила решения систем уравнений, известные вам из школьной алгебры, остаются в силе (почленное перемножение уравнений).

2) Если после преобразований получилось уравнение, левая половина которого есть многочлен, а в правой половине стоит единица, то это означает, что по крайней мере одно слагаемое равно единице, то есть выражает истину. Однако истинными могут быть и несколько слагаемых высказываний, так как в алгебре логики $(1) + (1) + \dots + (1) = 1$.

3) Если сумма нескольких слагаемых равна нулю, то все они выражают ложные высказывания.

4) Помните, что знак $+$ обозначает слово «или». Все высказывания, имеющие формулу: «верно или то, или другое предположение», записываются в виде суммы, приравненной единице.

5) Высказывание, имеющее формулу «имеет место и A и B и C » и так далее, записывается уравнением $ABC\dots = 1$, так как союз «и» обозначается знаком умножения и соответственное сложное высказывание — произведением.

6) Если получилось уравнение $ABC\dots = 1$, то все перемноженные высказывания истинны и $A = 1, B = 1, C = 1, \dots$

7) Уравнение $ABC\dots = 0$ выражает лишь то, что по крайней мере одно из высказываний A, B, C, \dots ложно. Однако среди них могут быть и истинные высказывания.

8) Для каждого высказывания a существует его отрицание \bar{a} : если a истинно, то \bar{a} ложно, если a ложно, то \bar{a} истинно. Нельзя считать отрицание истины a отрицательным числом в смысле обычной алгебры. В алгебре логики отрицательных чисел нет.

9) Помните и применяйте где возможно формулы, вытекающие из определений сложения и умножения:

$$a + \bar{a} = 1, a\bar{a} = 0.$$

10) Помните, что при натуральном значении n :

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ раз}} = na = a, a^n = a.$$

11) Получив при решении задачи уравнение в виде приравненного единице многочлена, рассмотрите все слагаемые. Если какое-нибудь из них содержит противоречие, то для упрощения дальнейших преобразований откиньте это слагаемое, как равное нулю.

Помня все это, принимайтесь за решение задач, применяя правила обычной алгебры.

Задача 1. Четыре ученицы: Мария (M), Нина (N), Ольга (O) и Поля (P) ходили на соревнование и заняли первые четыре места. На вопрос, кто из них какое место занял, три девушки ответили:

- 1) Ольга была вторая, Поля — третья;
- 2) Ольга была первая, Нина — вторая;
- 3) Мария была вторая, Поля — четвертая.

В каждом из этих трех ответов одна часть верна, другая неверна.

Какое место заняла каждая из четырех учениц?

Решение. Задачу можно было бы решить так. Составим все возможные перестановки четырех букв M, N, O, P . Таких перестановок будет 24 (составьте их). Каждую из перестановок надо сравнить с тремя условиями задачи и найти ту перестановку, которая удовлетворяет им, то есть такую перестановку, чтобы в каждом из трех условий одна часть оказалась верной, другая — неверной. Решение потребует $24 \cdot 3 = 72$ проверки.

Решение можно сократить следующими рассуждениями.

В каждом из данных трех ответов можно предположить верной первую или вторую часть.

Рассмотрим возможные предположения.

Предположим, что верно: Ольга была вторая. При таком предположении во втором ответе было бы неверно, что Ольга была первая, и, значит, верно, что Нина была вторая; это приводит к противоречию: Ольга — вторая (по предположению) и Нина — вторая (по следствию). Значит, предположение: Ольга была вторая — ложно, а верно, что Поля была третья, так как в каждом ответе одна часть верна, другая неверна: если высказывание Ольга была вторая неверно, то верно, что Поля была третья.

Если Поля была третья, то в третьем ответе неверно, что она была четвертая, и верно, что Мария была вторая.

Во втором ответе неверно, что Нина была вторая, значит верно, что Ольга была первая. Остается, что Нина была четвертая.

К этим же результатам мы придем, начиная с любого из предположений: Ольга была первая, Мария была вто-

рая, Нина была вторая, Поля была четвертая и так далее.

Решение с помощью логических уравнений. Вводим обозначения для высказываний: «Ольга была первая» — O_1 , Мария была вторая — M_2 , Нина не была первая — \bar{N}_1 , Поля не была вторая — \bar{P}_2 и так далее.

Приступая к решению, мы по первому условному ответу не можем сказать, будет ли $O_2 = 1$ или $O_2 = 0$, $P_3 = 1$ или $P_3 = 0$.

Но одна часть ответа верна, то есть или $O_2 = 1$, или $P_3 = 1$, поэтому

$$O_2 + P_3 = 1.$$

Так же из условных ответов второго и третьего имеем:

$$O_1 + N_2 = 1,$$

$$M_2 + P_4 = 1.$$

Итак, имеем три логических уравнения, которые все должны удовлетворяться одновременно, то есть имеем систему уравнений:

$$O_2 + P_3 = 1$$

$$O_1 + N_2 = 1 \quad (*)$$

$$M_2 + P_4 = 1$$

Мы ищем ответ, в котором говорится, что: Ольга заняла такое-то место, и Нина — такое-то, и Мария — такое-то, и Поля — такое-то. Союз «и» обозначается знаком умножения, поэтому мы должны получить ответ в виде произведения букв O, M, N, P .

Все правила обычной алгебры имеют место в алгебре высказываний. Перемножим почленно два первых уравнения системы (*). Получаем:

$$O_2O_1 + O_2N_2 + P_3O_1 + P_3N_2 = 1.$$

Это уравнение утверждает, что по крайней мере одно из слагаемых в левой части уравнения истинно и равняется единице.

$O_2O_1 = 0$, так как это утверждение противоречиво: Ольга заняла и второе, и первое место;

$O_2N_2 = 0$, так как O и N обе не могли быть вторыми.

Остается:

$$P_3O_1 + P_3N_2 = 1.$$

Помножим это уравнение почленно на третье уравнение системы (*). Имеем:

$$P_3O_1M_2 + P_3O_1P_4 + P_3N_2M_2 + P_3N_2P_4 = 1.$$

В этом уравнении $P_3O_1P_4 = 0$ и $P_3N_2P_4 = 0$ (Поля не может занимать третье и четвертое место); $P_3N_2M_2 = 0$ (Нина и Мария не могут обе занимать второе место). Остается

$$P_3O_1M_2 = 1$$

или

$$O_1M_2P_3 = 1.$$

Ольга заняла первое, Мария — второе, Поля — третье место. Если так, то Нина заняла четвертое место, и ответ будет

$$O_1M_2P_3N_4 = 1.$$

После решения задачи необходимо проверить правильность ответа. Это делается, как в любой задаче, исходя из условий задачи. В нашей задаче условия были следующие: в каждом из трех ответов учениц одна часть была верна, другая неверна:

1) Ольга — вторая, Поля — третья; сравнив с полученным ответом, видим, что первое утверждение (O_2) неверно, второе (P_3) — верно;

2) Ольга — первая, Нина — вторая: O_1 — верно, N_2 — неверно;

3) Мария — вторая, Поля — четвертая: M_2 — верно, P_4 — неверно.

Наше решение задачи верно. Если выпустить словесные пояснения в решении, которые для изучающего вскоре будут лишними, то решение задачи займет не более пяти строк. Само решение выполняется автоматически, как решение систем уравнений в обычной алгебре, которое учащийся 7-го класса выполняет без рассуждений.

Для решения этой задачи, как и всех аналогичных, можно составить другую систему уравнений. Второе решение будет дано на стр. 49, чтобы не усложнять для начинающего на первых порах изучение нового материала.

Не спешите с заявлением, что данное решение длинное. Длинно вы решали в школе в начале занятий и первые системы обычных уравнений, объясняя каждое преобразование. Решая логические уравнения, вы могли бы не писать тех произведений, в которых повторяется одна и та же буква с двумя разными индексами или две буквы с одинаковыми индексами: такие произведения равны нулю, и их потом пришлось вычеркивать. Следующие задачи вы можете решить уже гораздо короче.

Упражнение 1

Задача 2. При составлении расписания на определенный день в определенном классе преподавателями были высказаны просьбы:

- 1) математика, желающего иметь первый или второй урок;
- 2) историка, желающего иметь первый или третий урок;
- 3) литератора, желающего иметь второй или третий урок.

Как удовлетворить всем пожеланиям и можно ли это сделать одним только способом?

Ответы и указания ко всем упражнениям даны на стр. 50.

Упражнение 2

Задача 3. Четыре марсианки на вопрос об их возрасте дали ответы:

- 1) *Ми* — 22 года, *Ме* — 21 год;
- 2) *Мо* — 19 лет, *Ми* — 21 год;
- 3) *Ма* — 21 год, *Мо* — 18 лет.

Все марсианки — разных возрастов. В каждом ответе одна часть верна, другая неверна.

Сколько лет каждой из марсианок?

Задача 4. Три девушки: Аня (*A*), Варя (*B*) и Клава (*K*) ходили на демонстрацию. Одна из них была в красном платье, другая — в белом, третья — в синем. На вопрос, какое на каждой из девушек было платье, они дали ответ:

Аня была в красном,
Варя — в некрасном,
Клава — в несинем.

}

(*)

В этом условном ответе из трех частей одна верна, две неверны.

В каком платье была каждая из девушек?

Решение. Решим задачу рассуждением, не пользуясь логическими уравнениями.

В условном ответе (*) только одна часть верна. Можно предположить верною или первую часть (Аня — в красном), или вторую (Варя — в некрасном), или третью (Клава — в несинем).

При каждом из этих предположений остальные две части условного ответа (*) должны быть неверны. Рассмотрим вытекающие из каждого предположения выводы.

1) Предположение «Аня — в красном» невозможно, так как при этом предположении Варя окажется в некрасном, и в условном ответе (*) две части — первая и вторая — верны, чего не должно быть по условию задачи.

2) Предположим, что верна вторая часть условного ответа: Варя — в некрасном. При таком предположении Варя одета или в белое, или в синее платье.

Аня не может быть в красном платье, так как в таком случае в ответах (*) две части были бы верны; значит, она одета в белое или синее, то есть в некрасное, как и Варя. Значит, для Клавы остается только красное платье. Итак, при втором предположении:

Аня — в некрасном,

Варя — в некрасном,

Клава — в красном, то есть в несинем.

Сравнивая этот результат с условным ответом (*), видим, что в нем верны две части: Варя — в некрасном (по предположению) и Клава — в несинем (следствие). Это противоречит условию задачи, по которому в условном ответе должна быть верна только одна часть. Второе предположение — «Варя — в некрасном» приводит к противоречию с условием. Это предположение невозможно.

3) Остается только третье предположение, верна третья часть условного ответа (*), а именно: Клава — в несинем, и неверны первые две части условия (*). Если неверно, что Варя — в некрасном платье, то верно, что Варя в красном. В таком случае Клава должна быть одета в белое, а Аня — в синее платье, и мы имеем возможное предположение:

Аня — в синем, Варя — в красном, Клава — в белом платье.

В этом ответе первые две части несогласны с условным ответом (*), третья — согласна.

Наблюдения показывают, что это рассуждение с трудом усваивается.

Решение с помощью логических уравнений. Введем обозначения высказываний:

A_k — Аня — в красном,

\bar{B}_k — Варя в не красном,

\bar{K}_c — Клава — в не синем платье.

Условный ответ (*) выражается символом

$$A_k \bar{B}_k \bar{K}_c. \quad (**)$$

Верной может быть лишь одна из трех частей этого ответа (**), причем остальные две части неверны. Возможны три предположения:

1) Если верно, что Аня была в красном платье (A_k), то неверны утверждения: Варя — в не красном (\bar{B}_k) и Клава — в не синем (\bar{K}_c), и верны: Варя — в красном (B_k) и Клава — в синем (K_c). Этот вывод выражается произведением

$$A_k B_k K_c. \quad (1)$$

Это произведение равно единице, если первое предположение верно, и равно нулю, если предположение неверно.

2) Если верно, что Варя — в не красном (\bar{B}_k), то неверны утверждения: Аня — в красном (A_k) и Клава — в не синем (\bar{K}_c), а верны: Аня — в не красном (\bar{A}_k) и Клава — в синем (K_c), что выражается произведением

$$\bar{A}_k \bar{B}_k K_c. \quad (2)$$

Произведение (2) равно единице или нулю, в зависимости от того, верно или неверно второе предположение.

3) Если в (**) верна третья часть — Клава — в не синем (\bar{K}_c), то неверны утверждения Аня — в красном (A_k) и Варя — в не красном (\bar{B}_k), а верны: Аня — в не красном (\bar{A}_k) и Варя — в красном (B_k). Это предположение дает произведение

$$\bar{A}_k B_k \bar{K}_c. \quad (3)$$

Какое из трех предположений (1), (2), (3) верно, мы не знаем, но знаем, что по крайней мере одно из них верно. Поэтому имеем уравнение:

$$A_K B_K K_C + \bar{A}_K \bar{B}_K K_C + \bar{A}_K B_K \bar{K}_C = 1.$$

$A_K B_K K_C = 0$, так как A и B не могли быть обе в красном платье.

$\bar{A}_K \bar{B}_K K_C = 0$, так как при таком предположении синее платье занято Клавой, и для Ани и Вари не остается двух некрашенных платьев.

Можно было бы рассуждать и так: $\bar{A}_K \bar{B}_K K_C$ можно записать в виде $\bar{A}_K \bar{B}_K \bar{K}_K$; это предположение невозможно, так как по нему ни одна из девушек не одета в красное, значит $\bar{A}_K \bar{B}_K \bar{K}_K = 0$ и равнозначное ему $\bar{A}_K \bar{B}_K K_C = 0$.

Следовательно, остается:

$$\bar{A}_K B_K \bar{K}_C = 1.$$

Это возможно:

$$A_C B_K K_6 = 1.$$

Аня — в синем платье, Варя — в красном, Клава — в белом.

Примечание. Словесное объяснение дано для начинающих изучать алгебру логики. Сколько-нибудь знакомый с нею мог бы ограничиться следующим:

в условном ответе $A_K \bar{B}_K \bar{K}_C$ можно предполагать верной любую из трех частей ответа, считая каждый раз остальные два неверными. Из трех возможных комбинаций $A_K B_K K_C$, $\bar{A}_K \bar{B}_K K_C$ и $\bar{A}_K B_K \bar{K}_C$ по крайней мере одна верна, значит:

$$A_K B_K K_C + \bar{A}_K \bar{B}_K K_C + \bar{A}_K B_K \bar{K}_C = 1.$$

Первые два слагаемые равны нулю, остается:

$$\bar{A}_K B_K \bar{K}_C = 1 \text{ или } A_C B_K K_6 = 1.$$

Сравнение полученного ответа с условным (*) показывает, что он удовлетворяет условиям задачи: в полученном ответе при сравнении с (*) оказывается:

A_C — неверно, B_K — неверно, K_6 — верно.

Задача 5. Шесть школьников C, D, H, I, G, T ходили на олимпиаду. Двое из них решили задачи. На вопрос, кто решил, они ответили:

- 1) C и G ;
- 2) D и T ;
- 3) T и C ;
- 4) D и I ;
- 5) H и C .

В четырех из ответов одна часть верна (1), другая неверна (0); в одном из ответов обе части неверны (0 + 0).

Кто из учеников решил задачи на олимпиаде?

Решение без уравнений. Обозначим высказывания: C решил, G решил и так далее символами C, G, \dots . Предположение, что школьник C решил запишется равенством $C = 1$, G не решил задач — равенством $G = 0$.

Выясним, в каком ответе обе части неверны.

1) Положим, что в первом ответе обе части неверны, то есть $C = 0, G = 0$; тогда имеем: из третьего ответа, что T решил, $T = 1$, из второго $D = 0$, из пятого $H = 1$, из четвертого $I = 1$, то есть предположение (1) приводит к тому, что решили трое: H, I, T , что противоречит условию. Значит, первое наше предположение, что $C = 0$ и $G = 0$, невозможно.

2) Предположим, что во втором ответе обе части неверны: $D = 0, T = 0$; тогда из третьего ответа $C = 1$, из четвертого $I = 1$, из пятого $H = 0$, из первого $G = 0$.

Задачи решили C и I . Предположение (2) возможно.

3) Предположим, что в третьем ответе обе части неверны: $T = 0, C = 0$; тогда имеем: из первого ответа $G = 1$, из второго $D = 1$, из пятого $H = 1$. При этом предположении трое оказываются решившими, что противоречит условию; третье предположение отпадает.

4) Пусть в четвертом ответе обе части неверны. $D = 0, I = 0$. Тогда имеем: из второго ответа $T = 1$, из третьего $C = 0$, из первого $G = 1$, из пятого $H = 1$. Оказалось трое решивших; предположение (4) невозможно.

5) Пусть в пятом ответе обе части неверны: $H = 0, C = 0$. Тогда имеем: из первого ответа $G = 1$, из третьего $T = 1$, из второго $D = 0$, из четвертого $I = 1$. Опять ока-

залось трое решивших, что делает пятое предположение невозможным.

Итак, возможно только одно решение: решили C и I , $CI = 1$.

Проверка решения по пяти условиям задачи показывает, что решение $CI = 1$ верно и оно единственное.

В ответах:

в первом: C решил, G не решил;

во втором: D не решил, T не решил;

в третьем; T не решил, C решил;

в четвертом: D не решил, I решил;

в пятом: H не решил, C решил.

В одном ответе (втором) обе части неверны, в остальных — одна часть верна, другая неверна.

Решение $CI = 1$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Решение при помощи уравнений. Условия задачи можно записать так:

$$CG = DT = TC = DI = HC = 0. \quad (*)$$

$$(C + G) (D + T) (T + C) (D + I) (H + C) = 0 \quad (**)$$

Равенства нулю в $(*)$ следуют из того, что в каждом произведении по крайней мере один сомножитель равен нулю. В произведении $(**)$ одна из скобок (неизвестно которая) равна нулю ($0 + 0$, оба слагаемых ее нули), остальные четыре скобки равны единице ($0 + 1$).

Раскроем скобки в $(**)$ и уничтожим на основании $(*)$ отдельные слагаемые: перемножим первый сомножитель на второй, результат — на третий, новый результат — на четвертый, третий результат — на пятый сомножитель:

$$\begin{aligned} (C + G) (D + T) &= CD + CT + GD + GT = \\ &= CD + GD + GT, \end{aligned}$$

так как $CT = 0$ по $(*)$;

$$\begin{aligned} (CD + GD + GT) (T + C) &= CDT + GDT + DT^2 + \\ &+ C^2D + CGD + CDT = GT + CD, \end{aligned}$$

так как по $(*)$

$$\begin{aligned} DT = CG = CT &= 0, \text{ а } DT^2 + C^2D = GT + CD; \\ (GT + CD) (D + I) &= GTD + CD^2 + GTI + CDI = CD, \end{aligned}$$

так как по (*) $DT = DI = 0$, а $GTI = 0$ потому, что GTI означает, что задачу решили трое, что неверно;

$$CD(H + C) = CDH + C^2D = CD$$

Итак, левая часть выражения (**) равна CD и согласно условию**

$$CD = 0.$$

Можно этого результата добиться гораздо скорее. Представим, что в выражении (**) все скобки раскрыты. Получается многочлен, отдельные слагаемые которого после замены степеней букв первыми степенями их содержат два, три, четыре или пять множителей, например:

$$CD, CDI, CDTI, CDTIH.$$

Произведение из трех, четырех или пяти букв означает, что решили 3, 4 или 5 учеников, что по условию задачи неверно, и такие произведения равны нулю. Нам необходимо найти в развернутом выражении (**) только слагаемые, состоящие из двух букв. Таким произведением будет только

$$C^3D^2 = CD.$$

Итак, по раскрытии скобок в выражении (**) и отбрасывании всех слагаемых из трех, четырех и пяти букв, равных нулю, имеем в дополнении к (*) еще

$$CD = 0.$$

По смыслу задачи мы должны получить произведение двух из содержащихся в условии букв, равное единице. Полученные же пока уравнения имеют в правой части нули.

В уравнении (**) правая часть есть нуль, потому что четыре скобки равны каждая единице, одна скобка равна нулю. Мы не знаем, какая из скобок дает нуль.

Если мы из пяти множителей выражения (**) составим все произведения по четыре множителя в каждом произведении, то таких произведений будет пять:

$$\begin{aligned} &(C + G)(D + T)(T + C)(D + I), \\ &(C + G)(D + T)(T + C)(H + C), \\ &(C + G)(D + T)(D + I)(H + C), \\ &(C + G)(T + C)(D + I)(H + C), \\ &(D + T)(T + C)(D + I)(H + C). \end{aligned}$$

Четыре из пяти скобок равны единице, одна скобка равна нулю, так как в ней оба слагаемых равны нулю. Такая скобка войдет в четыре произведения и обращает их в нуль; в одно из пяти произведений она не войдет, и это произведение равно единице (например, если $C + G = 0$, то пятое произведение равно единице, если $D + T = 0$, то четвертое произведение равно единице и так далее). Следовательно, одно из пяти произведений равно единице, и сумма

$$\begin{aligned} & (C + G) (D + T) (T + C) (D + I) + \\ & + (C + G) (D + T) (T + C) (H + C) + \\ & + (C + G) (D + T) (D + I) (H + C) + \\ & + (C + G) (T + C) (D + I) (H + C) + \\ & + (D + T) (T + C) (D + I) (H + C) = 1. \end{aligned} \quad (***)$$

Предполагая, что в каждом из слагаемых раскрыты скобки, выпишем в получаемых многочленах слагаемые, состоящие из двух букв (таковые из трех или четырех букв равны нулю).

Имеем из первого слагаемого $C^2D^2 = CD = 0$;
из второго слагаемого $C^3D = CD = 0$ и $C^3T = CT = 0$;
из третьего слагаемого $C^2D^2 = CD = 0$;
из четвертого слагаемого $C^3D = CD = 0$ и $C^3I = CI$
(равенства нулю CI имеющиеся у нас уравнения не дают!);

из пятого слагаемого $C^2D^2 = CD = 0$.

Итак, из левой части уравнения (***) осталось только CI , и мы имеем

$$CI = 1.$$

Ответ. Задачи решили C и I .

Задача 6. У автора брошюры в детстве было четыре друга. Звали их Альберт, Карл, Дидрих и Фридрих. В один из осенних дней они впервые переступили порог школы. Учительница сказала им, что с этого дня она будет их называть по имени и фамилии. Оказалось, что у друзей фамилии те же, что и имена, только так, что ни у кого из них имя и фамилия не были одинаковы. Кроме того, фамилия Дидриха не была Альберт. Определить фамилию каждого из мальчиков, если дано, что имя

мальчика, у которого фамилия Фридрих, есть фамилия того мальчика, имя которого — фамилия Карла.

Решение при помощи уравнений. Условимся обозначать имена первыми буквами и фамилии указателями при обозначении имени.

Так, если имя мальчика A , а фамилия C , то это запишется символом A_C и $A_C = 1$; если же фамилия мальчика с именем A не C , то $A_C = 0$. При такой записи по условиям задачи

$$A_A = C_C = D_D = F_F = D_A = 0.$$

По последнему условию задачи есть: мальчик по имени X с фамилией F , мальчик по имени Y с фамилией X и мальчик C с фамилией Y , иными словами

$$X_F Y_X C_Y = 1.$$

Непосредственный путь для нахождения значений X и Y состоит в подстановке вместо X и Y по порядку всех четырех букв A, C, D, F , то есть в вычислении суммы (суммирование обозначается символом Σ).

$\Sigma X_F Y_X C_Y$ при замене X и Y буквами A, C, D, F .

Для привития навыков вычисления и рассуждения полезно выполнить подстановки, хотя, как увидим далее, можно обойтись без них.

Делаем подстановки. Ясно, что

$$X \neq C, X \neq F, Y \neq C, Y \neq F,$$

так как нет двух мальчиков с одинаковыми именами или с одинаковыми фамилиями.

Остается в $\Sigma X_F Y_X C_Y$ вместо X и Y подставлять только A и D . Начнем с подстановки в первый множитель $X = A$ и $X = D$;

$$\begin{aligned} \Sigma X_F Y_X C_Y &= \Sigma A_F Y_X C_Y + \Sigma D_F Y_X C_Y = A_F \Sigma Y_X C_Y + \\ &+ D_F \Sigma Y_X C_Y = (A_F + D_F) \Sigma Y_X C_Y \end{aligned}$$

(A_F и D_F как постоянные множители можно вынести за знак Σ).

Аналогично делаем подстановку в последнем множителе:

$$\begin{aligned} (A_F + D_F) \Sigma Y_X (C_A + C_D) &= (A_F + D_F) (C_A + C_D) \Sigma Y_X = \\ &= (A_F C_A + A_F C_D + D_F C_A + D_F C_D) \Sigma Y_X. \end{aligned}$$

Подставляя в Y_X значения A и D для Y и X , имеем:

$$(A_F C_A + A_F C_D + D_F C_A + D_F C_D)(A_A + A_D + D_A + D_D) =$$

$$= (A_F C_A + A_F C_D + D_F C_A + D_F C_D) A_D$$

(так как $A_A = D_A = D_D = 0$) $= A_F C_A A_D + A_F C_D A_D +$
 $+ D_F C_A A_D + D_F C_D A_D = D_F C_A A_D$, поскольку $A_F C_A A_D =$
 $= 0, A_F C_D A_D = 0$ (у двух мальчиков не может быть
одно и то же имя A), $D_F C_D A_D = 0$ (у двух мальчиков
не может быть одна и та же фамилия D). Итак,

$$D_F A_D C_A = 1:$$

D имеет фамилию F ,

A имеет фамилию D ,

C имеет фамилию A ,

F имеет фамилию C .

Ответ соответствует всем условиям задачи.

Второе решение. Надо решить уравнение $X_F Y_X C_Y = 1$, в котором видно, что X и Y могут получить только значение A и D .

Так как произведение $X_F Y_X C_Y = 1$, то все множители равны единице и $Y_X = 1$. Подстановка вместо X и Y букв A и D может дать только два результата — A_D и D_A .

$D_A = 0$ по условию. Остается единственная возможность $A_D = 1$, то есть в уравнении $Y_X = 1, Y = A, X = D$.

Это решение легко выразить рассуждениями без уравнений.

Задача 7. В журнале «Техника молодежи» (№ 5 за 1960 год) была предложена задача.

При решении одной задачи ученики дали три ответа:

1) X есть число иррациональное, равное площади правильного треугольника, у которого сторона $a = 2$;

2) X — число кратное 4 и равно радиусу окружности, длина которой 2;

3) $X < 3$ и равно диагонали квадрата, сторона которого 2.

В каждом из ответов одна часть верна, другая неверна. Чему равно X ?

З а м е ч а н и е. Упростим выражение вторых частей ответов.

1) Площадь правильного треугольника, сторона которого равна 2, есть $\frac{2^2}{4}\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

2) Радиус окружности, длина которой 2, дает:

$$2\pi r = 2, \quad r = \frac{1}{\pi}.$$

3) Диагональ квадрата, сторона которого равна 2, есть $2\sqrt{2}$.

После этого условные ответы задачи можно записать так:

1) X — число иррациональное, равное $\sqrt{3}$;

2) X кратно четырем и равно $\frac{1}{\pi}$;

3) $X < 3$ и равно $2\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е без применения уравнений.

1) $X \neq \sqrt{3}$, так как при предположении $X = \sqrt{3}$ мы имели бы в первом условном ответе обе части верные, а именно: $X = \sqrt{3}$, которое является иррациональным числом. Первый ответ не соответствует условию.

2) Третий ответ также невозможен, так как $2\sqrt{2} < 3$, и при предположении, что $X = 2\sqrt{2}$ в этом ответе, обе части верные.

3) Второй ответ удовлетворяет условию задачи: при предположении, что $X = \frac{1}{\pi}$ первая часть условного ответа « X кратно 4» неверна, так как кратным числа 4 может быть только целое число, а вторая часть ответа верна.

О т в е т: $X = \frac{1}{\pi}$.

Он удовлетворяет всем трем условиям:

1) $\frac{1}{\pi}$ — число иррациональное, но не равно $\sqrt{3}$. Значит, в первом условном ответе первая часть верна, вторая неверна;

2) во втором условном ответе вторая часть верна, первая неверна: $X = \frac{1}{\pi}$, но $\frac{1}{\pi}$ не является кратным 4;

3) в третьем условном ответе первая часть верна: $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3,14\dots} < 3$, но вторая часть неверна: $\frac{1}{\pi} \neq 2\sqrt{2}$.

Очевидно, редакция журнала ожидала такого решения.

Решение при помощи уравнений. Введем обозначения для высказываний:

$[J]$ — X число иррациональное,

$[\sqrt{3}]$ — X равно $\sqrt{3}$,

$[\text{кр. } 4]$ — X кратно 4,

$\left[\frac{1}{\pi}\right]$ — X равно $\frac{1}{\pi}$,

$[< 3]$ — X меньше 3,

$[2\sqrt{2}]$ — X равно $2\sqrt{2}$.

Как и при решении первых задач, имеем систему уравнений:

$$[J] + [\sqrt{3}] = 1,$$

$$[\text{кр. } 4] + \left[\frac{1}{\pi}\right] = 1,$$

$$[< 3] + [2\sqrt{2}] = 1.$$

Почленное перемножение первых двух уравнений дает:

$$[J][\text{кр. } 4] + [J]\left[\frac{1}{\pi}\right] + [\sqrt{3}][\text{кр. } 4] + [\sqrt{3}]\left[\frac{1}{\pi}\right] = 1.$$

$[j][\text{кр. } 4] = 0$, так как число X не может быть одновременно иррациональным и целым;

$[J]\left[\frac{1}{\pi}\right]$ — возможно, так как $\frac{1}{\pi}$ иррациональное число;

$[\sqrt{3}][\text{кр. } 4] = 0$, так как $\sqrt{3}$ не кратно 4;

$[\sqrt{3}]\left[\frac{1}{\pi}\right] = 0$, так как $\frac{1}{\pi} \neq \sqrt{3}$.

Уравнение получает вид:

$$[J]\left[\frac{1}{\pi}\right] = 1.$$

Таким образом, получено, что $X = \frac{1}{\pi}$, которое есть иррациональное число. Проверим, не противоречит ли этому третье условное уравнение. Перемножим почленно полученный результат с третьим условным уравнением:

$$[J] \left[\frac{1}{\pi} \right] [< 3] + [J] \left[\frac{1}{\pi} \right] [2 \sqrt{2}] = 1.$$

В первом слагаемом нет противоречий: $\frac{1}{\pi}$ — число иррациональное и меньше 3, второе слагаемое $[J] \left[\frac{1}{\pi} \right] [2 \sqrt{2}] = 0$, так как оно утверждает, что $X = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3,14}$ и в то же время равно $2 \sqrt{2}$. Последнее неверно.

Итак, имеем для значения X уравнение:

$$[J] \left[\frac{1}{\pi} \right] [< 3] = 1, \quad X = \frac{1}{\pi}.$$

Задача 8. В велогонке участвовали пять учащихся и заняли первые пять мест. На вопрос, кто из них какое место занял, ребята ответили:

1) Сережа (S) занял второе место, Коля (K) — третье;

2) Надя (N) — третье, Толя (T) — пятое;

3) Толя (T) — первое, Надя (N) — второе;

4) Сережа (S) — второе, Ваня (V) — четвертое;

5) Коля (K) — первое, Ваня (V) — четвертое место.

В каждом ответе одна часть верна, другая неверна.

Найти, кто какое место занял.

Решение без уравнений. Если верно, что Сережа занял второе место, то в третьем ответе неверно, что Надя заняла второе, а верно, что Толя занял первое место. Но тогда по 4 и 5 ответам Коля занял первое место, что невозможно, так как это место занял при сделанном предположении Толя. Предположение, что Сережа занял второе место, невозможно.

Если это предположение невозможно, то по первому ответу верно, что Коля занял третье место. По пятому ответу утверждение, что Коля занял первое место, неверно; значит, Ваня занял четвертое; по второму ответу предположение, что Надя заняла третье место, также неверно; значит, Толя занял пятое место, а по третьему ответу

Надя — второе. Итак, при сделанном предположении заняли места: Коля — третье, Ваня — четвертое, Толя — пятое и Надя — второе. Следовательно, Сережа занял первое место.

Решение при помощи уравнений. При употреблении введенного нами в предыдущих задачах способа обозначать высказывания символами, имеем:

$$\begin{array}{ll} 1) S_2 + K_3 = 1 & S_2 K_3 = 0 \\ 2) N_3 + T_5 = 1 & N_3 T_5 = 0 \\ 3) T_1 + N_2 = 1 & T_1 N_2 = 0 \\ 4) S_2 + V_4 = 1 & \text{и} \quad S_2 V_4 = 0 \\ 5) K_1 + V_4 = 1 & K_1 V_4 = 0 \end{array} \quad (*)$$

Почленное перемножение второго и третьего уравнений дает:

$$6) N_3 T_1 + N_3 N_2 + T_5 T_1 + T_5 N_2 = N_3 T_1 + T_5 N_2 = 1$$

($N_3 N_2 = 0$ и $T_5 T_1 = 0$, как выражающие невозможные высказывания).

Почленное перемножение уравнений (4) и (5) дает:

$$7) S_2 K_1 + S_2 V_4 + V_4 K_1 + V_4 = S_2 K_1 + V_4 = 1,$$

так как $S_2 V_4 = 0$ и $V_4 K_1 = 0$.

Почленное перемножение уравнений (1) и (6) дает:

$$S_2 N_3 T_1 + S_2 T_5 N_2 + K_3 N_3 T_1 + K_3 T_5 N_2 = 1,$$

а так как

$$S_2 N_2 = 0, \quad K_3 N_3 = 0,$$

то имеем:

$$8) S_2 N_3 T_1 + K_3 T_5 N_2 = 1.$$

Почленное перемножение результатов (7) и (8) дает.

$$S_2 K_1 N_3 T_1 + S_2 K_1 K_3 T_5 N_2 + V_4 S_2 N_3 T_1 + V_4 K_3 T_5 N_2 = 1;$$

первое, второе и третье слагаемые равны нулю, как содержащие

$$K_1 T_1 = 0, \quad K_1 K_3 = 0, \quad V_4 S_2 = 0.$$

$$\text{Остается } N_2 K_3 V_4 T_5 = 1$$

или

$$9) S_1 N_2 K_3 V_4 T_5 = 1.$$

О т в е т. Сережа был первым, Надя — второй, Коля — третьим, Ваня — четвертым, Толя — пятым.

Проверьте выполнение всех пяти условий задачи: в каждом условном высказывании одна часть верна, другая неверна.

З а д а ч а 9. Семья, состоящая из отца A , матери B и трех дочерей — C , D и E , — купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:

I) когда отец A смотрит передачу, то мать B делает то же;

II) дочери D и E , обе или одна из них, смотрят передачу;

III) из двух членов семьи — мать B и дочь C — смотрит передачу одна и только одна;

IV) дочери C и D или обе смотрят, или обе не смотрят;

V) если дочь E смотрит передачу, то и отец A и дочь D делают то же.

Кто из членов семьи в этот вечер смотрел передачу?

Р е ш е н и е. Обозначим буквами A , B , C , D , E высказывания (предположения): что A , B и так далее смотрят передачу; тогда \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} означают, что A , B и так далее не смотрят.

Имеем:

1) на основании первого условия имеет место одна из возможностей: либо отец и мать вдвоем смотрят, либо отец не смотрит, а мать смотрит, либо оба не смотрят, то есть $AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = 1$; но

$$AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = AB + \bar{A}(B + \bar{B}) = AB + \bar{A} = 1$$

(так как $B + \bar{B} = 1$); имеем уравнение

$$\bar{A} + AB = 1. \quad (1)$$

2) Из второго условия имеем

$$DE + D\bar{E} + \bar{D}E = 1;$$

$$E(D + \bar{D}) + D\bar{E} = E + D\bar{E},$$

то есть

$$E + D\bar{E} = 1. \quad (2)$$

3) Третье условие дает уравнение

$$B\bar{C} + \bar{B}C = 1. \quad (3)$$

4) Четвертое условие

$$DC + \bar{D}\bar{C} = 1. \quad (4)$$

5) Из пятого условия имеем: если дочь E смотрит передачу, то имеем EAD ; если же E не смотрит, то остаются возможности, что A и D оба или смотрят, или оба не смотрят, или смотрит только отец A , или только сестра D . Имеем:

$$\begin{aligned} EAD + \bar{E}AD + \bar{E}\bar{A}\bar{D} + \bar{E}\bar{A}D + \bar{E}A\bar{D} &= \\ &= EAD + \bar{E}\bar{D}(\bar{A} + A) + \bar{E}D(A + \bar{A}) = \\ &= EAD + \bar{E}\bar{D} + \bar{E}D = EA D + \bar{E}(\bar{D} + D) = EAD + \bar{E}, \end{aligned}$$

отсюда

$$EAD + \bar{E} = 1. \quad (5)$$

Использование второго распределительного закона дает возможность упростить уравнения (1) и (2), как будет показано во втором решении этой же задачи.

Все пять уравнений должны удовлетворяться одновременно, поэтому

$$(\bar{A} + AB)(E + D\bar{E})(B\bar{C} + \bar{B}C)(DC + \bar{D}\bar{C})(EAD + \bar{E}) = 1.$$

Раскрытие скобок можно произвести в любом порядке:

а) перемножаем почленно (2) и (5):

$$E + D\bar{E} = 1,$$

$$\bar{E} + EAD = 1,$$

$$E\bar{E} + D\bar{E} + EAD + EAD\bar{E} = 1.$$

(квадраты заменены первыми степенями); если учесть, что

$$E\bar{E} = 0,$$

то остается

$$D\bar{E} + EAD = 1. \quad (I)$$

б) перемножаем почленно (3) и (4):

$$B\bar{C} + \bar{B}C = 1,$$

$$DC + \bar{D}\bar{C} = 1,$$

$$B\bar{C}DC + B\bar{C}\bar{D} + \bar{B}CD + \bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{C} = 1$$

или

$$B\bar{C}\bar{D} + \bar{B}CD = 1; \quad (II)$$

в) перемножив (I) и (1):

$$D\bar{E} + EAD = 1,$$

$$\bar{A} + AB = 1,$$

имеем

$$D\bar{E}\bar{A} + D\bar{E}AB + EAD\bar{A} + EADB = 1;$$

$$EAD\bar{A} = 0 \text{ и } \bar{A}D\bar{E} + AB\bar{D}\bar{E} + ABDE = \\ = \bar{A}D\bar{E} + ABD(\bar{E} + E) = \bar{A}D\bar{E} + ABD$$

$$\text{и } ABD + \bar{A}D\bar{E} = 1, \quad (III)$$

г) перемножив почленно (II) и (III):

$$B\bar{C}\bar{D} + \bar{B}CD = 1,$$

$$ABD + \bar{A}D\bar{E} = 1,$$

имеем

$$B\bar{C}\bar{D}AD + \bar{B}CDAB + B\bar{C}\bar{D}\bar{A}D\bar{E} + \bar{B}CD\bar{A}\bar{E} = 1$$

$$\text{или } \bar{A}BCD\bar{E} = 1.$$

Ответ. Передачу смотрели только дочери C и D .

Решение будет гораздо короче, если помнить формулы поглощения алгебры высказываний (стр. 20): $a\bar{a} = 0$, $a + \bar{a} = 1$ для любого высказывания a и его отрицания.

Ограничимся решением этой одной более сложной задачи. Таких задач, и гораздо более сложных, решаемых при помощи алгебры логики, можно было бы дать много. Методические соображения заставляют воздержаться пока от этого.

Второй способ решения задачи № 1

Для упражнения в решении логических уравнений можно предложить второй способ решения нашей задачи.

Согласно первому условному ответу, верно одно из двух: или Ольга — вторая, и тогда Поля не третья, или Ольга не вторая, но Поля — третья. Иными словами, из двух произведений $O_2\bar{P}_3$ и \bar{O}_2P_3 одно верно, но которое из них верно, нам неизвестно. Но верно равенство

$$O_2\bar{P}_3 + \bar{O}_2P_3 = 1.$$

Из других условных ответов получаем подобные же уравнения:

$$O_1\bar{N}_2 + \bar{O}_1N_2 = 1$$

$$M_2\bar{P}_4 + \bar{M}_2P_4 = 1.$$

Имеем систему уравнений:

$$O_2\bar{P}_3 + \bar{O}_2P_3 = 1$$

$$O_1\bar{N}_2 + \bar{O}_1N_2 = 1 \quad (**)$$

$$M_2\bar{P}_4 + \bar{M}_2P_4 = 1.$$

Перемножим почленно два первых уравнения:

$$O_2\bar{P}_3O_1\bar{N}_2 + O_2\bar{P}_3\bar{O}_1N_2 + \bar{O}_2P_3O_1\bar{N}_2 + \bar{O}_2P_3\bar{O}_1N_2 = 1;$$

$$O_2\bar{P}_3O_1\bar{N}_2 = 0 \text{ (Ольга не может занимать два места);}$$

$$O_2\bar{P}_3\bar{O}_1N_2 = 0 \text{ (Ольга и Нина не могут занимать обе второе место).}$$

Остается уравнение:

$$\bar{O}_2P_3O_1\bar{N}_2 + \bar{O}_2P_3\bar{O}_1N_2 = 1.$$

Умножение его почленно на третье уравнение системы (**) дает:

$$\begin{aligned} \bar{O}_2P_3O_1\bar{N}_2M_2\bar{P}_4 + \bar{O}_2P_3O_1\bar{N}_2\bar{M}_2P_4 + \bar{O}_2P_3\bar{O}_1N_2M_2\bar{P}_4 + \\ + \bar{O}_2P_3\bar{O}_1N_2\bar{M}_2P_4 = 1. \end{aligned}$$

Второе и четвертое слагаемые равны нулю, так как содержат противоречие P_3P_4 ; третье слагаемое равно нулю, как содержащее противоречие N_2M_2 . Остается

$$\overline{O_2}P_3O_1\overline{N_2}M_2\overline{P_4} = 1,$$

или

$$O_1M_2P_3 = 1,$$

или

$$O_1M_2P_3N_4 = 1.$$

Упражнение 1

Задача 2. Решение системы приводит к уравнению

$$M_1J_2I_3 + I_1M_2J_3 = 1.$$

Оба слагаемых удовлетворяют условиям задачи. Здесь мы имеем равенство

$$(1) + (1) = 1.$$

Возможны два варианта расписания.

Ответ. $M_1J_2I_3 = 1$.

$$I_1M_2J_3 = 1.$$

Найдите эти ответы рассуждением.

Упражнение 2

Задача 3. Обозначайте высказывания символами Ma_{21} , Mi_{22} и так далее.

Ответ. Ma — 21 год, Mi — 22 года, Mo — 19 лет. Me — 18 лет.

Решайте задачу рассуждением.

Примечание к решению задачи 4. Мы приводим его только для того, чтобы дать пример вычисления, который может быть использован и в других задачах. Предположим, что рассуждениями, приведенными в решении, мы пришли к результату:

$$\overline{A}_K\overline{B}_K K_c + \overline{A}_K B_K \overline{K}_c = 1. \quad (1)$$

Дальнейшие же соображения, использованные при решении, не пришли в голову.

Дальше можно поступать следующим образом. Имеем

$$A_K + B_K + K_c = 1, \quad (2)$$

так как это уравнение выражает тот несомненный факт, что одна из девушек была в красном платье.

Перемножим почленно уравнения (1) и (2). Имеем:

$$A_{\kappa} \bar{A}_{\kappa} \bar{B}_{\kappa} K_c + A_{\kappa} \bar{A}_{\kappa} B_{\kappa} \bar{K}_c + B_{\kappa} \bar{A}_{\kappa} \bar{B}_{\kappa} K_c + B_{\kappa} \bar{A}_{\kappa} \bar{K}_c + K_{\kappa} \bar{A}_{\kappa} \bar{B}_{\kappa} K_c + \\ + K_{\kappa} \bar{A}_{\kappa} B_{\kappa} \bar{K}_c = 1.$$

Первое, второе и третье слагаемые равны нулю, как содержащие $A_{\kappa} \bar{A}_{\kappa}$ или $B_{\kappa} \bar{B}_{\kappa}$; пятое и шестое слагаемые также равны нулю, как содержащие противоречия $K_{\kappa} K_c$ и $K_{\kappa} B_{\kappa}$.

Остается равенство:

$$\bar{A}_{\kappa} B_{\kappa} \bar{K}_c = 1. \quad (3)$$

Отсюда уже следует ответ: $B_{\kappa} A_c K_c$.

Этот ответ можно получить и выкладками. Имеем очевидные равенства:

$$A_{\sigma} + B_{\sigma} + K_{\sigma} = 1 \text{ и } A_c + B_c + K_c = 1.$$

Умножив почленно уравнение (3) на первое из этих очевидных равенств, а результат — на второе равенство (проделайте для упражнения эти выкладки!), получим, после отбрасывания равных нулю слагаемых,

$$\bar{A}_{\kappa} B_{\kappa} \bar{K}_c K_c A_c = 1.$$

Так как множители \bar{A}_{κ} и \bar{K}_c поглощаются значениями $A_c = 1$ и $K_c = 1$ (A_c и K_c не могут быть равными нулю, так как произведение равно 1), то имеем

$$A_c B_{\kappa} K_c = 1.$$

Ответ получен при помощи одних только выкладок.

Второе решение задачи 9. В системе уравнений (1 до 5) можно упростить два первых уравнения при помощи формулы, которая часто применяется:

$$(A + \bar{A})(B + \bar{A}) = AB + A\bar{A} + \bar{A}B + \bar{A} = AB + \bar{A}(B + 1) = \\ = AB + \bar{A};$$

применяя это равенство в обратном порядке, имеем:

$$AB + \bar{A} = (A + \bar{A})(B + \bar{A}) = 1 \cdot (B + \bar{A}) = B + \bar{A}.$$

Полученное равенство есть частный случай второго распределительного закона

$$(A + B)(B + C) = AC + B.$$

Итак, формула (1) первого решения получает вид

$$B + \bar{A} = 1.$$

Формулу (2) можно упростить аналогично:

$$(D + E)(E + \bar{E}) = D\bar{E} + E = (D + E) \cdot 1 = D + E.$$

Формула (2) принимает вид

$$D + E = 1.$$

Получаем для решения задачи 9 систему уравнений:

$$1) \quad B + \bar{A} = 1,$$

$$2) \quad D + E = 1;$$

преобразованиями, данными в первом решении, получаем:

$$3) \quad B\bar{C} + \bar{B}C = 1,$$

$$4) \quad CD + \bar{C}\bar{D} = 1,$$

$$5) \quad EAD + \bar{E} = 1.$$

$$\text{Из (1) и (2): } BD + \bar{A}D + BE + \bar{A}E = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Из (3) и (4): } B\bar{C}CD + \bar{B}CD + B\bar{C}\bar{D} + \bar{B}C\bar{C}\bar{D} = \\ = \bar{B}CD + B\bar{C}\bar{D} = 1. \end{aligned}$$

Перемножая почленно полученные выводные уравнения, имеем:

$$\begin{aligned} BD\bar{B}C + BD\bar{C}\bar{D} + \bar{A}D\bar{B}C + \bar{A}DB\bar{C}\bar{D} + BE\bar{B}CD + BE\bar{C}\bar{D} + \\ + \bar{A}E\bar{B}CD + \bar{A}EB\bar{C}\bar{D} = \bar{A}D\bar{B}C + BE\bar{C}\bar{D} + \bar{A}E\bar{B}CD + \\ + \bar{A}EB\bar{C}\bar{D} = 1. \end{aligned}$$

Умножая этот результат почленно на (5), то есть $EAD + \bar{E} = 1$, имеем:

$$\begin{aligned} \bar{A}D\bar{B}C\bar{E}A + \bar{A}D\bar{B}C\bar{E} + BE\bar{C}\bar{D}EAD + BE\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}E\bar{B}CDA + \\ + \bar{A}E\bar{B}C\bar{D}\bar{E} + \bar{A}EB\bar{C}\bar{D}AD + \bar{A}EB\bar{C}\bar{D}\bar{E} = 1. \end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме второго, равны нулю, как содержащие произведение одного из высказываний на его отрицание; остается

$$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}\overline{E} = 1,$$

то есть $DC = 1$; смотрели передачу D и C .

МАШИНА ИЛИ НАУКА ЛЕНТЯЕВ?

Мы решили несколько задач. Почти для всех рассмотренных примеров было показано, как решение задачи может быть достигнуто без символики и приемов алгебры логики, когда счастливая догадка подсказала способ рассуждения. Такая возможность не лишает алгебру логики ее значения. По этому поводу поучительно вспомнить рассуждения академика А. Н. Крылова по вопросу о взаимоотношениях математики и техники.

Встречались представители техники, которые недооценивали значения математики. Они ссылались на тот факт, что, например, «в средние века и в древности возводились неподражаемые дворцы и храмы, поражающие не только размерами, красотой форм и линий, но и легкостью сооружения, разумным использованием материала, соблюдением даже в деталях, например в контрфорсах, истинных принципов строительной механики, которой тогда не было, да и быть не могло, так как даже правило параллелограмма сил известно не было».¹ Это внушало противникам математики мнение, что математика в сущности есть переливание из пустого в порожнее, ибо «всё, что в ней есть, взято из ее основных, до тривиальности очевидных, аксиом; значит, всеобъемлющий ум видел бы сразу в этих аксиомах и все их следствия, то есть — всю математику».²

На это А. Н. Крылов отвечает: «Да, ум всеобъемлющий (разрядка наша. — И. Д.) это видел бы, но известно, что ум человеческий ограничен — глупость беспредельна. Математика и нужна уму ограниченному, как подспорье для правильных умозаключений».³

¹ А. Н. Крылов. Прикладная математика и ее значение для техники. Изд. АН СССР, 1931, стр. 5.

² Там же, стр. 6.

³ Там же.

К этим словам А. Н. Крылова можно добавить следующее. В минувшие века чудеса архитектуры возводились в тех случаях, когда находился гениальный строитель. Люди вроде Леонардо да Винчи рождаются редко. Поэтому и чудеса архитектуры возникали с большими перерывами во времени. В наши дни, когда ежегодно возводятся десятки высотных зданий, нельзя рассчитывать на гениев, а нужно, чтобы эти здания могли строить Иванов и Петров — люди, не относящиеся к гениям. Им для возведения высотных зданий необходимы большие знания по математике.

Совершенно так же обстоит дело с решением задач, приведенных выше. Встречались студенты, которые легко, без символического аппарата, решали предлагаемые примеры, но таких было мало. У подавляющего же большинства не хватало догадки для решения этих задач. Решение их им стало доступным только при помощи предложенных основ алгебры логики.

Естествен вопрос: нельзя ли приобрести способность догадки, которая помогла бы решить любую задачу?

Бытописатель насекомых Жан Анри Фабр (1823—1915), член-корреспондент Парижской академии наук, лауреат Нобелевской премии, награжденный за литературную деятельность двумя орденами Почетного легиона, в одной из своих книг пишет: «Если мне выпало на долю написать страницу-другую, которые читатель пробежал без скуки, то я обязан этим в большой степени математике, этой удивительной учительнице в искусстве направлять мысли, приводить в порядок неупорядоченное, выкорчевывать глупости, фильтровать грязное и дать ясность — эту высшую форму из всех качеств риторики. Но она (математика) не создает способности догадки или остроумия — тот деликатный цветок, который растет не на всякой почве и распускается так, что никто не знает, как».¹

Ту же мысль на более прозаическом языке выражает талантливый современный венгерский математик Д. Пойа в книге, изданной на русском языке под названием «Как решить задачу?»

¹ Сборник «Обучение и воспитание в школе». Ленинградский городской институт усовершенствования учителей, Л., 1946, стр. 139.

После ряда примеров решения задач в результате удачных догадок автор дает параграф, которого читатель ожидает с первой страницы книги:

«Правила, как делать открытия. Первое правило — надо иметь способности, а наряду с ними и удачу. Второе правило — стойко держаться и не отступать, пока не появится счастливая идея... Установить безотказно действующие условия или правила эвристики, которые позволили бы решить все математические задачи, было бы куда более желательно, чем найти философский камень, которого тщетно искали алхимики. Такие правила творили бы чудеса, но чудес не бывает. Найти безотказно действующие правила, применимые ко всем возможным проблемам (разрядка наша. — И. Д.), — это старая мечта, но мечта, которая навсегда останется только мечтой... Но эвристика может стремиться изучить типичные приемы и процессы (умственные операции, ходы, шаги), полезные при решении задач... Собрание таких вопросов и советов, сформулированных в достаточно общем виде и расположенных в четкой последовательности, возможно, менее ценно, чем философский камень, но зато такой список — вещь реальная, и может быть составлен».²

Этот вывод Пойа равносителен тому совету, который каждый учитель дает учащимся, нередко заявляющим, что их «не научили решать задачи». Научить решать любую задачу невозможно, но научиться решать задачи, не содержащие особенных трудностей, можно.

Алгебра логики вносит значительный вклад в сокровищницу полезных приемов для решения задач, притом таких, которые другими средствами не решаются или решаются с большим трудом.

Однако не следует, как иногда бывает, отрицать значения решения задач обычными логическими рассуждениями.

Развитие логического мышления, которое в чистой форме применяется при арифметическом решении задач, является важной задачей при изучении математики. В

¹ Эвристика — система логических приемов и методических правил теоретического исследования.

² Д. Пойа. Как решить задачу. Учпедгиз, М., 1959, стр. 141..

этой связи можно привести рассказ знаменитого Эйнштейна из его биографии.

Гимназист 1-го класса Альберт Эйнштейн в переменах между уроками слышал, что старшие ученики говорят об уроке алгебры. Он спросил дома у дяди, что это за алгебра? Дядя ответил: «Алгебра — это арифметика лентяев. Им лень думать, поэтому они обозначают искомое число какой-нибудь буквой, делают механически разные преобразования и получают ответ».

Отстаивать «честь» алгебры нет надобности. И обычная алгебра, и алгебра логики облегчают решение задач, которые арифметически часто решаются при помощи сложных рассуждений, алгебраически же — просто. Но бывают и такие задачи, которые арифметически решаются проще, чем алгебраически. Арифметика есть школа мышления, поэтому арифметическое решение задач не теряет своего значения. Верно говорят, что «алгебра есть самая хитрая и полезная машина, придуманная человеком». В наше время машинной техники следует усвоить искусство пользования этой «машиной», тем более что, как рассказано выше, без нее многие вопросы оказываются трудно решаемыми.

* * *

15/28-III - 12/28
у ч. 15/28
м. 15/28

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
11	14 снизу	пространения, как и все другие пере- довые взгляды	потребителем новой логики. Не мень- шую, если не боль-
21	4 снизу	получть	получить

Заказ № 348-а

И.А. Денман

**П Е Р В О Е
ЗНАКОМСТВО
с
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛОГИКОЙ**